Transformation de Fourier

Exercice 1. Calculer les transformées de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$, de $f(x) = e^{-x^2}$ et de $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ (pour la deuxième, on vérifiera que la transformée de Fourier vérifie une équation différentielle).

Exercice 2. (Formule de Poisson)
1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\phi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi)$ appartient à $L^1_{2\pi}$ et que $\|\phi\|_1^{2\pi} \leq \frac{\|f\|_1}{2\pi}$.
2. On suppose que f est continue et que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Montrer que ϕ est continue. On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$ ou bien que $\forall n \in \mathbb{N}, \widehat{f}(n) \geq 0$. Montrer, en utilisant le théorème de Féjer, la formule de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

Exercice 3. (Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$)
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(\int_{-n}^{n} f(x)e^{-ix\xi}dx)_n$ converge vers $\mathcal{F}(f)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En déduire que la transformée de Fourier de $\arctan(\frac{1}{x})$ est $\frac{i\pi}{\xi}\left(e^{-|\xi|-1}\right)$.

Exercice 4. (Transformée de Fourier et produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$)

1. En utilisant la transformée de Fourier, montrer que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'unité, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonctions $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f \star g = f$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f \star f = f$.

Exercice 5. (Transformée de Fourier et produit de convolution dans $L^2(\mathbb{R})$)
1. Calculer la transformée de Fourier de $1_{[a,b]}$.
2. La fonction $\frac{sin(x)}{x}$ est-elle dans $L^1(\mathbb{R})$? dans $L^2(\mathbb{R})$? Calculer sa transformé de Fourier-Plancherel.
3. On rappelle que si $f, g \in L^2$, alors $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \widehat{fg}$. On note $f_a(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$. Calculer $f_a * f_b$. En déduire que l'équation $f * f = f$ admet une infinité de solutions dans L^2.

Exercice 6. (Densité des translatés dans $L^1(\mathbb{R})$)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $\widehat{f}(x_0) = 0$. Monter que $Vect(\tau_x f), x \in \mathbb{R}$ n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R})$, où $\tau_x f(t) = f(t+x)$. D'après un théorème difficile dû à Wiener la réciproqie est aussi vraie.

Exercice 7. (Densité des translatés dans $L^2(\mathbb{R})$)
1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) = 0$ sur un ensemble de mesure strictement positive. Montrer qu'il existe $g \neq 0$ telle que $< g, h >= 0$ pour tout $h \in Vect(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$. En déduire que si $Vect(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f) \neq 0$ p.p.

2. Réciproquement on suppose que $\mathcal{F}(f) \neq 0$ p.p., et on suppose que g est orthogaonal à $Vect(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$. Montrer que la transformée de Fourier de $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ est identiquement nulle. Conclure que $Vect(\tau_x f, x \in \mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. (Transformée de Fourier d'une fonction impaire)
On fixe $f \in L^1(\mathbb{R})$ impaire.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:
$$\widehat{f}(x) = -2i \int_0^{+\infty} f(t)sin(xt)dt$$
2. Prouver que la fonction $\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{sin(u)}{u}du$ est définie, continue et bornée sur $[0; +\infty[$.
3. Montrer que l'on a:
$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} -2if(x)(\int_x^{Rx} \frac{sin(u)}{u}du)dx$$
En déduire:
$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t}dt = -2i \int_0^{+\infty} f(x)\Phi(x)dx$$

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \frac{\arctan x}{\ln(2+x^2)}$$
   (a) Montrer que $g \in C_0(\mathbb{R})$.
   (b) On suppose que g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f. Montrer que f est nécessairement impaire (presque partout).
   (c) En déduire que g n'est pas la tranformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Exercice 9. (Une équation intégrale)
Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds$$
où β est un réel strictement positif.

1. Ecrire cette équation sous la forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
2. En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in]0; \frac{1}{2}[$. Montrer qu'alors cette solution est unique. La déterminer.

Exercice 10. (Principe d'incertitude de Heisenberg)
Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi^2 = 1$.

1. Montrer que $2\int_{\mathbb{R}} t\phi'(t)\phi(t)dt = -1$.
2. En déduire que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} w^2 |\widehat{\phi}(w)| dw\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \phi(t)| dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}$$

Quand a-t-on l'égalité ?

Exercice 11. (Théorème de Paley-Wiener)

- Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)e^{a|\xi|} \in L^2(\mathbb{R})$ pour un certain $a > 0$. Montrer que $F(z) = \int \hat{f}(\xi)e^{\xi z} d\xi$ est un prolongement de f holomorphe sur la bande $|y| < a$ avec $y = Im(z)$ tel que $F(.+iy)_{|y|<a}$ est uniformément borné dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Réciproquement on suppose l'existence d'un tel prolongement F.
  1. On note $f_y(x) = F(x+iy)$. Montrer en utilisant la question précédente que si $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)e^{a|\xi|} \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}$.
  2. On pose $G_\lambda = K_\lambda * F$ où K_λ est l'approximationde Féjer. Montrer que G_λ est un fonction holomorphe sur $|Im(z)| < a$. Puis en notant $g_y^\lambda(x) = G_\lambda(x+iy)$, montrer en utilisant les questions précédentes qu'on a $\widehat{g_y^\lambda}(\xi) = \widehat{g_0^\lambda}(\xi)e^{-\xi y}$.
  3. En déduire qu'on a toujours $\hat{f}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}$.
  4. Conclure que $\hat{f}(\xi)e^{a|\xi|} \in L^2(\mathbb{R})$.